Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

Derivadas – Ejercicios de optimización

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular. Los siguientes consejos pueden ser útiles:

• Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
• Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.
• Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.
• Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de f.
• Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.

1. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determina el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

   Observación. La solución de este ejercicio también resuelve el problema de calcular la longitud de la escalera más larga que, llevada en posición horizontal, puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b.

2. Demuestra que entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es un cuadrado.

3. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

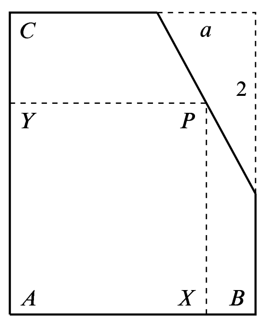
4. Calcula el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

5. Encuentra un punto P de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$ y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en P con los ejes coordenados tenga área mínima.

6. Calcula un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.

7. Calcula el área de la elipse de mínima área circunscrita a un rectángulo dado. Recuerda que el área de una elipse de semiejes s, t es igual a $\pi s t$.

8. La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



9. Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

10. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

11. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

12. Se necesita construir un depósito de acero de 500 m^3, de forma rectangular con base cuadrada y sin tapa. Tu trabajo, como ingeniero de producción, es hallar las dimensiones del depósito para que su costo de producción sea mínimo.

13. Halla el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

14. Halla el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura h y radio r conocidos.

15. Halla el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

16. La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcula las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio r.

17. Calcula la distancia mínima del punto $(6, 3)$ a la parábola de ecuación $y = x^2$.

18. Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80 libras al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4 libras de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8 libras para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

19. Una empresa produce semanalmente 300 bicicletas de montaña que vende íntegramente al precio de 600 euros cada una. Tras un análisis de mercados observa que si varía el precio, también varían sus ventas (de forma continua) según la siguiente proporción: por cada 7 euros que aumente o disminuya el precio de sus bicicletas, disminuye o aumenta la venta en 3 unidades.

    a) ¿Puede aumentar el precio y obtener mayores ingresos?

    b) ¿A qué precio los ingresos serán máximos?

20. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

21. Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio R y ángulo central θ (medido en radianes). El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro del jardín?.

22. Se corta un alambre de longitud L formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcula por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

23. Dados dos puntos A y B situados en el primer cuadrante del plano, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

24. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcula las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

25. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcula sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

26. En una lámina circular de radio R se recorta un sector circular de ángulo ϑ y con él se construye un cono. Calcula el valor de ϑ para que el volumen del cono así construido sea máximo.

27. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcula las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

28. Se considera la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Calcula el triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto $(0,b)$ y base paralela al eje de abscisas.

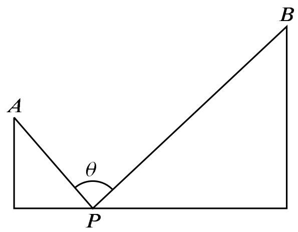
29. Con una cuerda de longitud L, con un nudo corredizo en uno de sus extremos, rodeamos una columna circular de radio R haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcula la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

30. Estás en el desierto con tu vehículo situado en un punto cuyas coordenadas son $A=(0,40)$ y tienes que ir a otro punto $C=(28,0)$ (la unidad de medida es la milla terrestre). Del punto A al origen $O=(0,0)$ y de éste al punto C hay una carretera asfaltada. Pero también, para ir de A a C, puedes hacer parte o todo el camino sobre la arena. En carretera tu velocidad es de 75 millas por hora; y sobre la arena de 45 millas por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a C?

31. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 centímetros. Se supone que el rectángulo se apoya sobre un lado del triángulo.

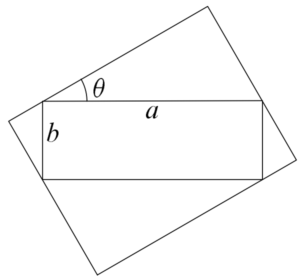
32. El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto A a otro punto B siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas, $y=0$, separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por ejemplo, aire y agua). Sea c la velocidad de la luz en el semiplano superior $y>0$ y sea $\frac{3}{4}c$ la velocidad correspondiente al semiplano inferior $y<0$. Calcular el punto de dicho eje por el que pasará el rayo que viaje desde el punto $A=(-4,3)$ al $B=(3,-4)$.

33. Calcula la posición del punto $P=(x,0)$ en la figura de la derecha, donde $A=(0,1)$ y $B=(2+\sqrt{3},2)$, para que el ángulo θ sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de θ? Justifica con detalle lo que haces.



34. Calcula un punto (u,v) de la parábola $y=3-x^2$ de forma que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima.

35. Calcula el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado cuyos lados tiene longitudes a y b.



Consideraremos ahora el problema de hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

***Paso 1**. Hallar todos los puntos x de $[a, b]$ que o bien son puntos críticos de f o son puntos en los que f no es derivable.*
***Paso 2**. Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos en el Paso 1 y también en a y en b.*
***Paso 3**. Comparar los valores obtenidos en el Paso 2. El mayor de todos ello será el máximo absoluto de f en $[a, b]$ y el menor será el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.*

36. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

    a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.

    b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

    c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

    d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.

    e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

37. Para cada número real t sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2 x$. Calcula, para cada valor de $t \in [-1, 1]$, el mínimo valor de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos cuya existencia habrá que justificar.

38. Definamos $f(x) = 5x^2 + \alpha x^{-5}$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Calcula el valor más pequeño de α tal que $f(x) \geqslant 21$ para todo $x > 0$.

39. Calcula el mínimo valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ donde $a_1, a_2, \cdots a_n$ son números reales dados.

40. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

41. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Estudia la continuidad y derivabilidad de f y calcula su imagen.

42. Dado $a \neq 0$, definamos, para $x \neq 1/a$, la función:

$$f(x) = \arctan a + \arctan x - \arctan \frac{a + x}{1 - ax}.$$

Calcula la imagen de f.